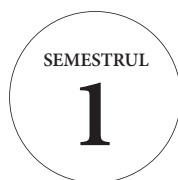


Costel Chiteș
(coordonator)
Daniela Chiteș
Daniela Heuberger
Nicolae Mușuroia

Matematică

Teme suplimentare
PENTRU CLASA A V-A



CORINT

Date despre autori:

COSTEL CHITEȘ – profesor gr. I la Colegiul Național „Tudor Vianu” din București, doctor în matematică, lector dr. la Facultatea de Științe ale Educației, cu o activitate de 10 ani ca inspector de matematică în cadrul Inspectoratului Școlar al Municipiului București, membru în comitetul de redacție al „Gazetei Matematice”, redactor al revistei „Arhimede” și al revistei „Argument”; a publicat manuale pentru clasele IX-XII, culegeri de exerciții și probleme și lucrări cu caracter metodic.

DANIELA CHITEȘ – profesor gr. I la Școala nr. 79 „Academician Nicolae Teodorescu” din București, metodist, coautor al mai multor auxiliare școlare de matematică pentru gimnaziu, publicate la diferite edituri, cât și autor al unor articole în reviste de specialitate.

DANIELA HEUBERGER – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor a mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică”, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef adjunct al revistei de matematică „Argument”.

NICOLAE MUȘUROIA – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor al mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică”, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef al revistei de matematică „Argument”.

Redactare și tehnoredactare computerizată: Mihaela Zbarcea

Coperta: Andreea Apostol

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii CORINT,
parte componentă a GRUPULUI EDITORIAL CORINT.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică: teme suplimentare pentru clasa a V-a: semestrul I/

Costel Chiteș, Daniela Chiteș, Daniela Heuberger, Nicolae Mușuroia. -

București: Corint, 2012

ISBN 978-973-135-728-7

I. Chiteș, Costel

II. Chiteș, Daniela

III. Heuberger, Daniela

IV. Mușuroia, Nicolae

51(075.33)

Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	3
Capitolul 1. Operații cu numere naturale	9
1.1. Proprietăți	7
1.2. Relația de ordine a numerelor naturale	8
1.3. Calcule cu sume și produse	10
1.4. Teorema împărțirii cu rest	12
1.5. Numere prime	13
1.6. Puteri	17
1.7. Sisteme de numerație	26
Capitolul 2. Logică matematică. Elemente de teoria mulțimilor ...	39
2.1. Elemente de logică matematică	39
2.2. Noțiuni de teoria mulțimilor	44
Capitolul 3. Elemente de aritmetică (continuare)	49
Capitolul 4. Probleme de numărare	63
Capitolul 5. De vorbă cu cititorul – Întrebări	73
Matematicieni – Scurte note istorice	79
Indicații și răspunsuri	85
Tabelul numerelor prime mai mici de 10 000	94
Sugestii pentru lecturi suplimentare	92

Cuvânt-înainte

În formarea oricărui elev există două praguri (șocuri): trecerea din școala primară în gimnaziu și trecerea din gimnaziu la liceu.

Ne referim la noul colectiv de elevi, la adaptarea la noile cerințe și standarde cât și la volumul de informații, modul de procesare, la importanța actului educațional pe care familia o susține.

Considerăm că actualii elevi au un mod mult mai rapid de achiziționare a informațiilor în primul rând datorat mijloacelor electronice, gândesc mai rapid și sunt mai spontani fără a fi totdeauna și mai profunzi. Este datoria noastră, de părinți, de educatori, de a dirija în sens pozitiv aceste căutări în domeniul cunoașterii atunci când acestea există. În caz contrar, trebuie încercate toate formele prin care se poate trezi în elev dorința de a învăța. În acest scop trebuie să punem la contribuție toate mobilurile posibile: aspirația spre mai bine, satisfacția de a produce bucurie părinților, rușinea de ignoranță, dezvoltarea spiritului competitiv etc.

Ne dorim ca această lucrare să vină în ajutorul celor ce doresc să treacă de nivelul programelor analitice de matematică, programe care acoperă doar o parte din cunoștințele necesare unei înțelegeri profunde a matematicii, a frumuseții ei, a multor aplicații în cele mai diverse domenii ale cunoașterii. Vom încerca să vă invităm în a vă construi propriile portofolii, în care să adăugați continuu noi probleme interesante, aplicații diverse și mici incursiuni proprii de cercetare a unor teme. Gazeta matematică și alte reviste de specialitate vă vor direcționa, vă vor sprijini în încercările temerare de a performa. Susținem ideea de a utiliza internetul pentru o rapidă informare asupra unor subiecte, a unor aplicații ale matematicii în diverse domenii. Nu trebuie uitat că toate aceste informații sunt selectate dintr-o bibliografie specializată. Trebuie să ne deprindem cu modul de a selecta cărțile în funcție de nivelul la care ne aflăm, de gradul de accesibilitate a acestora, de scopurile studiului nostru. Să ne amintim expresia: „cum este biblioteca așa este și persoana care o posedă”. Zborul spre adevăr este imposibil în absența elanului, a patosului dionisiac.

Suntem adepții ideii exprimate sintetic de către Hermann Weyl (Raum, Zeit, Materie ed. a 5-a, Berlin 1923): „Așa cum orice om trebuie să se străduiască mai întâi să învețe limba și scrisul spre a le putea folosi apoi în mod curent pentru exprimarea gândurilor sale, tot astfel, aici, există numai o singură cale pentru a te elibera din sclavia formulelor: trebuie să ajungi la o astfel de dominație asupra instrumentului... încât, nestingherit de tehnica formală, să poți ataca adevăratele probleme... “.

Dezvoltarea raționamentului, a gândirii matematice, se face în anii de gimnaziu prin aritmetică și geometrie. Aceste forme sunt considerate de Platon ca entități absolut reale, independente de percepție, susceptibile de a fi definite absolut precis, fiind atemporale.

Pentru oricare transfer de concepte sau metode dintr-un domeniu în altul, matematica, dacă nu este indispensabilă, este utilă, deoarece modelarea ei

permite conceptelor și metodelor să le separe, să le elibereze, căpătând o relativă independență, cu care apoi pot trece în alt domeniu decât cel de origine.

Un expert în rezolvări de probleme – spunea Howard W. Eves – trebuie înzestrat cu două calități incompatibile: o imaginație neobosită și o stăruință plină de răbdare.

Lucrarea noastră încearcă să sprijine o înțelegere mai clară a conceptelor, să prezinte modele de exerciții rezolvate, să evidențieze aplicații ale cunoștințelor asimilate. Am preferat să dezvoltăm dorința cercetărilor proprii prin generalizări ale unor proprietăți, prin incursiuni în istoria matematicii. Considerând că matematica nu este doar un instrument pentru celelalte științe, ci este un act de cultură indispensabil pentru fiecare dintre noi, am prezentat la finalul lucrării scurte prezentări ale matematicienilor citați, lansând elevilor interesați alte dezvoltări.

Lectura manualului, parcurgerea notițelor din clasă, rezolvarea temelor rămân fundamentale pentru elevi. Materialul nostru sperăm să dea o nouă lumină, să deschidă direcții spre aplicații, care în anii următori de școală își vor arăta rolul. Am ales tipuri importante de probleme pe care le-am analizat și rezolvat complet, propunând apoi lectorului exerciții asemănătoare. Am evidențiat probleme de numărare din motivele mai sus menționate. Caracterul agreabil al acestora, importanța lor în aplicațiile practice, cotidiene, au rolul de a evidenția utilitatea directă, indispensabilă a unor cunoștințe de matematică. Dorim ca acest material să ajute elevul de a ajunge de la nivelul manualului la nivelul problematicei concursurilor și olimpiadelor școlare. Toate tipurile de probleme selectate cât și noțiunile teoretice prezentate fac parte din cerințele concursurilor școlare.

În lucrare sunt prezentate o serie de exerciții rezolvate, ca model, iar pentru exercițiile propuse, la sfârșitul lucrării sunt prezentate indicații și soluții. Pentru ușurința umărării, toate exercițiile (rezolvate și propuse) sunt numerotate în continuare.

Am atașat la final și tabelul numerelor prime mai mici de 10 000. Invităm cititorul să încerce rezolvarea prin efort propriu a tuturor exercițiilor și în cazul nereușitei să apeleze la indicații și soluții.

Sugestiile pentru lecturi suplimentare conțin surse deosebite, cărți de bibliotecă, de care nu te poți despărți. Lectura acestora, făcută de mai multe ori, la intervale diferite de timp, îți dau adevărata lor valoare, crează uneori nostalgii. Așa cum în literatură există cărți excepționale, în toate celelalte domenii lucrurile stau la fel, deci și în matematică.

Este important ca elevul să se obișnuiască a cerceta singur, a descoperi metode noi de rezolvare, probleme noi, să-și pună continuu întrebări. Lucrarea noastră ajută în formarea unor deprinderi de lucru independente, în crearea propriilor portofolii. Aceste portofolii sunt evaluate de cadrul didactic și vor fi completate și îmbunătățite continuu în anii de școală.

Autorii

1. Operații cu numere naturale

1.1. Proprietăți

Să ne reamintim proprietăți ale operațiilor de adunare și înmulțire a numerelor naturale.

$$2 + 8 = 10, 8 + 2 = 10. \text{ Deci } 2 + 8 = 8 + 2.$$

Exerciții propuse

1. Considerați alte perechi a, b de numere naturale și verificați că $a + b = b + a$. Deducem că pentru oricare a, b naturale există egalitatea: $a + b = b + a$, numită proprietatea de **comutativitate a adunării**.

$$(4 + 8) + 16 = 12 + 16 = 28, 4 + (8 + 16) = 4 + 24 = 28, \text{ de unde} \\ (4 + 8) + 16 = 4 + (8 + 16).$$

2. Considerați alte triplete a, b, c de numere naturale și verificați că $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Deducem că pentru oricare a, b, c naturale există egalitatea:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

numită proprietatea de **asociativitate a adunării**.

Datorită acestor două proprietăți, putem, într-o sumă finită de numere naturale, să schimbăm ordinea termenilor cum dorim sau să punem oricâte paranteze, rezultatul pe care-l vom obține este același.

3. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$a + b + c + d = (a + b) + (c + d).$$

Există un număr special, notat cu 0, număr natural pentru care avem:

$$0 + a = a + 0 = a,$$

pentru oricare număr natural a . Din acest motiv, 0 reprezintă **elementul neutru** pentru numerele naturale considerate **față de operația de adunare**.

$$5 \cdot 7 = 35, 7 \cdot 5 = 35. \text{ Deci } 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5.$$

4. Considerați alte perechi a, b de numere naturale și verificați că $a \cdot b = b \cdot a$. Deducem că pentru oricare a, b naturale există egalitatea: $a \cdot b = b \cdot a$, numită proprietatea de **comutativitate a înmulțirii**.

$$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60, 3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 20 = 60, \text{ de unde } (3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$$

5. Considerați alte triplete a, b, c de numere naturale și verificați că:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Deducem că pentru oricare a, b, c naturale există egalitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, numită proprietatea de **asociativitate a înmulțirii**.

Datorită acestor două proprietăți, putem, într-un produs finit de numere naturale, să schimbăm ordinea factorilor cum dorim sau să punem oricâte paranteze, rezultatul pe care-l vom obține este același.

6. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d).$$

Rezolvare. $a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b \cdot c) \cdot d = [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$

Există un număr special, notat cu 1, număr natural pentru care avem:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

pentru oricare număr natural a . Din acest motiv, 1 reprezintă **elementul neutru** pentru numerele naturale considerate **față de operația de înmulțire**.

$$3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 9 = 27 ; 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 = 27 . \text{ Deci } 3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$$

7. Considerați alte perechi a, b, c de numere naturale și verificați că:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = ac + bc.$$

Deducem că pentru oricare a, b, c naturale există egalitățile:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = ac + bc$$

numite proprietatea de **distributivitate a înmulțirii față de adunare**.

Acestea sunt utilizate ca legi de desfacere a parantezelor. Citite de la dreapta la stânga se numesc reguli de dare de factor comun.

8. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Generalizare.

9. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

10. Să se calculeze: $2013 \cdot 5447 + 2013 \cdot 1553 - 7000 \cdot 2012$.

11. Fie m, n numere naturale nenule și $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ numere naturale.

a) Să se calculeze produsul $P = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_m)$;

b) Câți termeni are produsul P ?

1.2. Relația de ordine a numerelor naturale

Fiind date două numere naturale a, b definim $a < b$ dacă există c natural nenul pentru care $b = a + c$. Vom citi: a mai mic strict decât b .

Exemplu

$2 < 3$ deoarece există numărul nenul 1 pentru care $3 = 2 + 1$.

Putem scrie: $0 < 1 < 2 < 3 < \dots < n < n + 1 < \dots$

Remarcăm că din relația $a < b$ rezultă existența unui c natural nenul pentru care $b = a + c$, deci $b - a = c$, $c > 0$ deci $b - a > 0$.

Reciproc, dacă $b - a > 0$, notăm $b - a = c$, $c > 0$, de unde $b = a + c$, adică $a < b$.

Pentru $a < b$ mai putem scrie $b > a$ și citim b mai mare strict decât a .

Exemplu. $5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0$.

Date numerele naturale a, b , definim $a \leq b$ dacă $a < b$ sau $a = b$, vom citi a mai mic sau egal cu b .

Exerciții rezolvate

12. Date numerele naturale a, b, c , pentru care $a < b$ și $b < c$ rezultă $a < c$?

Rezolvare. Există d, e numere naturale nenule pentru care $b = a + d$, $c = b + e$, de unde $c = a + (d + e)$, adică $a < c$

Dacă a, b sunt numere naturale, atunci din $a \cdot b = 0$ rezultă $a = 0$ sau $b = 0$.

Această proprietate se aplică de exemplu atunci când rezolvăm ecuații.

13. Să se rezolve ecuația: $(x - 2)(x - 3) = 0$.

Rezolvare. Conform proprietății precedente, vom avea: $x - 2 = 0$ sau $x - 3 = 0$, adică $x = 2$ sau $x = 3$.

Exercițiu propus

14. Fiind date trei numere naturale a, b, c din egalitatea $a \cdot b \cdot c = 0$ rezultă $a = 0$ sau $b = 0$ sau $c = 0$.

Exercițiu rezolvat

15. Să se arate că au loc proprietățile:

- Dacă a, b, k sunt numere naturale, $a < b$, $k > 0$ atunci $ak < bk$.
- Dacă a, b, c, d sunt naturale, $a < b$ și $c < d$ atunci $a + c < b + d$ și $ac < bd$.
- Dacă a, b sunt naturale pentru care avem $a < b$ atunci $a + 1 \leq b$.
- Dacă a, b, c, d sunt naturale, $a < b$ și $c \leq d$ atunci $a + c < b + d$.

Rezolvare

a) Există c natural nenul pentru care $b = a + c$, de unde $bk = ak + ck$. Cum c, k sunt numere naturale nenule, rezultă $ck \neq 0$, adică $ck > 0$. Atunci $bk > ak$ sau echivalent $ak < bk$.

b) Avem $b - a > 0$, $d - c > 0$, deci $b + d - (a + c) > 0$, adică $b + d > a + c$.

Din $a < b$, prin înmulțire cu c se obține $ac \leq bc$, deoarece c poate fi egal cu zero. Din $c < d$ rezultă $bc < bd$. Utilizând cele două inegalități rezultă $ac < bd$.

c) Există c natural nenul pentru care $b = a + c$. Cum $c \geq 1$, rezultă $c + a \geq a + 1$, deci $b \geq a + 1$.

d) Avem $b - a > 0$, $d - c \geq 0$, deci $b + d - (a + c) > 0$, adică $b + d > a + c$.

Exerciții propuse

16. Fie n un număr natural nenul. Există un număr finit de numere naturale cuprinse între n și 0 .

17. Scriem numerele naturale nenule de la 1 până la 2012 unele lângă altele astfel: 123...91011...99100...20112012. Câte caractere au fost utilizate ?

Notă

Proprietățile expuse mai sus se demonstrează riguros în cadrul axiomaticii lui Giuseppe Peano a numerelor naturale, care poate fi studiată mai târziu în anii de liceu sau facultate.

1.3. Calcule cu sume și produse

Ne propunem pentru început să calculăm suma: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20$.

Putem începe prin a calcula astfel: $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, $\dots$ Este anevoios și există pericolul continuu de a greși.

Vom proceda altfel, mult mai ingenios. Vom recurge la o poveste despre matematicianul german C. F. Gauss (1777-1855).

Se spune că micuțul Gauss, elev fiind în clasa a III-a, a primit la o lucrare calculul sumei S . Foarte rapid Gauss efectuează calculul, scrie rezultatul pe propria tăbliță apoi o predă învățătorului său. Învățătorul îl privește cu neîncredere pentru „graba sa“ fără a citi rezultatul. Abia după ceva vreme, când toți elevii clasei predau propriile tăblițe, învățătorul rămâne plăcut impresionat deoarece rezultatul găsit de micuțul Gauss era corect.

Iată raționamentul:

$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20$. Apoi scrie termenii sumei descrescător:

$S = 20 + 19 + 18 + \dots + 3 + 2 + 1$. Adunând termenii situați unii sub alții determinăm: $2 \cdot S = (1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + \dots + (19 + 2) + (20 + 1)$ sau $2 \cdot S = 21 \cdot 20$, de unde $S = 210$.

Exercițiu rezolvat

18. Să se calculeze sumele:

- a) $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$;
- b) $T = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, unde n este un număr natural nenul;
- c) $U = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$;
- d) $H = 3 + 6 + 9 + \dots + 99$;
- e) $D = 51 + 52 + \dots + 100$;
- f) $M = 2013 + 2014 + 2015 + \dots + 2070$;

Indicații

a) $S = 100 + 99 + \dots + 2 + 1$. Prin adunare obținem $2S = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (100 + 1)$ sau $2S = 101 \cdot 100$, deoarece sunt 100 de paranteze egale cu 101. Rezultă $S = 101 \cdot 50 = 5050$.

b) $T = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$.

Prin adunare obținem $2S = (1 + n) + (1 + n) + \dots + (1 + n)$, suma având n termeni. Deci $2S = n(n + 1)$, de unde $S = n(n + 1) : 2$. Putem scrie rezultatul și sub formă de fracție: $S = \frac{n(n + 1)}{2}$.

c) $U = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 51 \cdot 50 = 2550$.

d) $H = 3(1 + 2 + 3 + \dots + 33) = 3 \cdot \frac{33 \cdot 34}{2} = 99 \cdot 17 = 1683$.

e) *Metoda 1*

$$D = (1 + 2 + 3 + \dots + 50 + 51 + 52 + \dots + 100) - (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = \\ = \frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{50 \cdot 51}{2} = 5050 - 1275 = 3775.$$

Metoda 2

$$D = (50 + 1) + (50 + 2) + \dots + (50 + 50) = 50 \cdot 50 + (1 + 2 + \dots + 50) = \\ = 2500 + \frac{50 \cdot 51}{2} = 2500 + 1275 = 3775.$$

f) Vom prefera aplicarea metodei 2, de la pct. e):

$$M = (2012 + 1) + (2012 + 2) + \dots + (2012 + 58) = 2012 \cdot 58 + (1 + 2 + \dots + 58) = \\ = 116696 + \frac{58 \cdot 59}{2} = 116696 + 1711 = 118407.$$

Exercițiu propus

19.

Să se calculeze sumele:

- a) $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 200$;
- b) $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 2n$, unde n este un număr natural nenul;
- c) $C = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 3n$, unde n este un număr natural nenul;
- d) $D = 4 + 8 + 12 + \dots + 400$;
- e) $E = 55 + 60 + 65 + 70 + \dots + 150$;
- f) $F = 304 + 305 + \dots + 500$;
- g) $G = 3 + 7 + 11 + \dots + 199$;
- h) $H = \underbrace{11 \dots 1}_9 + \underbrace{11 \dots 1}_8 + \dots + 11 + 1$.

Dacă n este un număr natural nenul, vom nota prin $n!$ (se citește n factorial) produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Deci: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Pentru $n = 0$ se consideră: $0! = 1$.

Exemple

$$1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Exercițiu rezolvat

20. Să se calculeze:

- a) $5!$; b) $6!$; c) $7!$; d) câte cifre are numărul $10!$?

Rezolvare

- a) 120 ; b) 720 ; c) 5040 ; d) $10! = 3628800$, deci numărul are 7 cifre.

Exercițiu propus

21. Să se calculeze:

- a) $7! - 6!$; b) $10! + 11!$; c) $5 \cdot 5!$; d) $12! : 10!$.

1.4. Teorema împărțirii cu rest

Fiind date numerele naturale a , b unde $b \neq 0$, există și sunt unice numerele naturale q , r pentru care avem $a = b \cdot q + r$, unde $r < b$.

a se numește **deîmpărțit**, b se numește **împărțitor**, q se numește **cât**, r se numește **rest**.

Exemplu

Să se efectueze împărțirea lui 295 la 7. Avem $295 = 7 \cdot 42 + 1$.

Observație

De exemplu putem scrie egalitatea: $295 = 7 \cdot 41 + 8$. Nu reprezintă teorema împărțirii cu rest deoarece $r = 8 > 7$. Reținem și unicitatea numerelor q , r prin aplicarea teoremei.

În cazul când $r = 0$, avem $a = b \cdot q$. Vom spune că împărțirea lui a prin b s-a realizat exact.

Exerciții propuse

22. Să se completeze tabelul următor, în care d , i , c , r sunt respectiv: deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul împărțirilor:

d	i	c	r
27	10	2	7
39	60		
100	7		
110		12	2
	9	8	3

23. Câte numere naturale de trei cifre există dacă împărțite la 19 dau restul 15 ?

24. Să se determine restul împărțirii numărului $a = 14! + 300$ la $b = 182$.

Exerciții rezolvate

25. a) Să se determine resturile posibile ale împărțirii unui pătrat perfect la 7.

b) Să se determine toate numerele naturale n pentru care $n! + 241$ este pătrat perfect.

Rezolvare

a) Mai întâi trebuie să ridicăm la pătrat:

$$(7k + r)^2 = (7k + r)(7k + r) = 49k^2 + 7kr + 7kr + r^2 = 7(7k^2 + 2kr) + r^2,$$

deci restul împărțirii lui $(7k + r)^2$ la 7 este egal cu restul împărțirii lui r^2 prin 7.

Vom crea tabelul:

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Tragem concluzia că orice număr de forma $7k + 3$, sau $7k + 5$ sau $7k + 6$ nu este pătrat perfect.

b) Pentru $n \geq 7$, numărul $n! + 241$ este de forma $7k + 3$, deci nu este pătrat perfect. Vom verifica doar valorile naturale mai mici decât 7 și determinăm:

$$n = 5, \text{ avem } 241 + 120 = 361 = 19^2;$$

$$n = 6, \text{ avem } 241 + 720 = 961 = 31^2.$$

Exercițiu propus

26. a) Să se determine resturile posibile ale împărțirii unui pătrat perfect la 5.

b) Să se determine toate numerele naturale n pentru care $n! + 48$ este pătrat perfect.

Definiție. Fiind date numerele naturale a, b , spunem că a divide b și scriem $a \mid b$ dacă există c număr natural pentru care $b = a \cdot c$. În acest caz, a se numește **divizor** al lui b , iar b se numește **multiplu** al lui a .

În caz contrar, spunem că a nu divide b și scriem $a \nmid b$.

Exemple

$2 \mid 6$ deoarece există numărul natural 3 pentru care $6 = 2 \cdot 3$, deci 2 este un divizor al lui 6, sau spunem că 6 este un multiplu al lui 2.

$3 \nmid 10$ deoarece pentru orice număr natural c avem $10 \neq 3 \cdot c$.

1.5. Numere prime

Definiție. Un număr natural p , $p \geq 2$ se numește **prim** dacă are ca divizori doar pe 1 și p .

Exemple

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Un număr natural $n \geq 2$ care nu este prim se numește compus.

Ciurul lui Eratostene

Reamintim că ciur reprezintă sită. În ciur (sită) vor rămâne doar numerele prime mai mici decât n .

Matematicianul alexandrin Eratostene a dat o metodă prin care putem determina toate numerele prime mai mici decât un număr natural dat.

Metoda este ingenioasă și este utilizată cu eficiență și azi. Fie n un număr natural fixat, $n \geq 2$. Scriem numerele naturale 2, 3, 4, 5, 6, ..., $n - 1$, n . Păstrăm numărul 2 și marcăm toate numerele multiplu de 2 care sunt mai mici decât n . După marcarea numerelor, primul număr nemarcat este 3. El este prim deoarece nu este divizibil cu 2. Lăsăm nemarcat numărul 3 și marcăm toți multiplii lui 3 ce sunt mai mici decât n . Unele numere au fost deja marcate fiind multipli de 2. La următorul pas, primul număr nemarcat este 5. El este prim nefiind divizibil cu 2 sau cu 3. Lăsăm numărul 5 nemarcat și marcăm toți multipli de 5. Continuăm

procedeul, la sfârșit, se obține o secvență de numere nemarcate; acestea reprezintă numerele prime mai mici sau egale cu n . Această metodă de cernere a numerelor este cunoscută sub denumirea de *ciurul lui Eratostene*.

Notă

Pe baza acestui principiu au fost construite tabele de numere prime. În cazul numerelor mari au fost utilizate calculatoare performante. Astfel, în Los Alamos Scientific Laboratory au fost determinate în acest fel toate numerele prime până la 100 000 000. S-a demonstrat că șirul numerelor prime este infinit încă din Antichitate.

La sfârșitul lucrării sunt date toate numerele prime mai mici decât 10 000.

Exerciții propuse

27. Prin utilizarea ciurului lui Eratostene, să se determine toate numerele prime mai mici decât 100.

28. Care sunt numerele prime de două cifre care au suma cifrelor egală cu 8?

Exercițiu rezolvat

29. Care dintre următoarele numere: 181, 187 este prim?

Rezolvare. O metodă care stabilește prin calcul dacă un număr este prim, constă în împărțirea numărului dat la numere prime, în ordine crescătoare până când câtul devine mai mic decât împărțitorul.

Dacă nicio împărțire nu s-a efectuat exact, numărul considerat este prim. În caz contrar, numărul nu este prim.

Împărțim numărul 181 respectiv la 2, 3, 5, 7, 11, 13 nu obținem restul 0, deci 181 nu se divide cu aceste numere prime. Ne oprim și tragem concluzia că 181 este prim, deoarece prin împărțirea lui 181 la 17, câtul devine mai mic decât împărțitorul.

Împărțim numărul 187 respectiv la 2, 3, 5, 7 nu obținem restul 0, deci nu se divide prin niciunul dintre acestea. Dar $187 = 11 \cdot 17$, deci este compus.

Exerciții propuse

30. Să se decidă care dintre următoarele numere: 221, 551, 557, 1591 este prim?

31. Să se determine două numere prime a căror sumă este 949.

32. Există două numere prime a căror sumă este egală cu 1593?

33. Cu ajutorul tabelii de numere prime, să se determine două numere prime a căror sumă este egală cu: 88.

34. a) Să se determine numerele prime de forma $3k$, unde k este număr natural.

b) Să se determine primele cinci numere prime de forma $3k + 1$.

c) Să se determine primele cinci numere prime de forma $3k + 2$.

35. Să se determine n număr natural pentru care n , $n + 2$, $n + 4$ sunt numere prime.

36. a) Să se determine toate numerele prime de forma $5k$, unde k este număr natural.

b) Să se determine primele cinci numere prime respectiv de forma: $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$.

37. Să se determine n număr natural pentru care n , $n + 2$, $n + 6$, $n + 8$, $n + 14$ sunt numere prime.

38. Aflați numerele naturale nenule n care împărțite la 18 dau restul un număr prim, de două ori mai mic decât câtul.

(G.M.-B nr.7-8-9/2010)

Exerciții rezolvate

39. Să se arate că au loc afirmațiile:

a) Pentru oricare a număr natural $a \mid a$;

b) Dacă a , b sunt numere naturale, $a \mid b$ și $b \mid a$ atunci $a = b$;

c) Dacă a , b , c sunt numere naturale, $a \mid b$, $b \mid c$ atunci $a \mid c$.

Rezolvare. a) Există numărul 1 pentru care $a = 1 \cdot a$, de unde deducem $a \mid a$ (reflexivitate).

b) Există c , d numere naturale pentru care $b = a \cdot c$, $a = b \cdot d$. Atunci $b = b \cdot (c \cdot d)$. Dacă $b = 0$, atunci $a = 0$, deci $a = b$. Dacă $b \neq 0$, atunci $c \cdot d = 1$, de unde $a = b$ (antisimetrie).

c) Există d , e numere naturale pentru care $b = a \cdot d$, $c = b \cdot e$, de unde $c = a \cdot (d \cdot e)$, adică $a \mid c$ (tranzitivitate).

40. Să se arate că au loc afirmațiile:

a) Dacă $a \mid b$ și $a \mid c$ atunci $a \mid bt \pm cl$, unde t , l sunt numere naturale.

b) Dacă $a \mid b \pm c$ și $a \mid b$ atunci $a \mid c$.

c) Dacă $a \mid b$, c este un număr natural atunci $a \mid bc$;

d) $1 \mid a$, pentru oricare număr natural a .

e) $a \mid 0$ pentru oricare a număr natural.

f) Dacă $0 \mid a$ atunci $a = 0$.

Rezolvare. a) $b = ak$, $c = at$, atunci $bt \pm cl = a(kt \pm tl)$. b) Fie $a \mid b + c$, $a \mid b$, atunci $b + c = a \cdot d$, $b = a \cdot e$, de unde $c = a(d - e)$. Rezultă $a \mid c$; c) $b = a \cdot d$, de unde $bc = a \cdot (dc)$. Rezultă $a \mid bc$; d) $a = 1 \cdot a$, de unde $1 \mid a$; e) Există numărul natural 0 pentru care $0 = a \cdot 0$; f) Există un număr natural b pentru care $a = 0 \cdot b$, de unde $a = 0$.

Exercițiu propus

41. Este adevărată afirmația: dacă a , b , c sunt numere naturale, $a \nmid b$ și $a \nmid c$ atunci $a \nmid b + c$?

Definiții

Un număr natural de forma $n = 2k$, k număr natural, se numește **număr par**.